

## WERYFIKACJA MODELU MATEMATYCZNEGO PIERWSZEGO OKRESU KONWEKCYJNEGO SUSZENIA JABŁKA Z UWZGLĘDNIENIEM SKURCZU SUSZARNICZEGO

Roland Zawiślak, Helena Lisowa, Renata Bochyńska

**Streszczenie.** Zweryfikowano matematyczny model pierwszego okresu suszenia z uwzględnieniem skurczu suszarniczego w przedziale zawartości wody od  $u_0 = 5,50 \text{ kg H}_2\text{O}\cdot\text{kg}^{-1} \text{ s.m.}$  do  $u = 3,14 \text{ kg H}_2\text{O}\cdot\text{kg}^{-1} \text{ s.m.}$ , czyli w zakresie wilgotności względnej 85–76%, z błędem nie przekraczającym 2,4%. Przeprowadzono pomiary zawartości wody w czasie procesu suszenia i zmian objętości krążków jabłka, suszonych w temperaturze 55°C, przy prędkości przepływu powietrza suszącego wynoszącej  $0,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

**Słowa kluczowe:** jabłka, suszenie, konwekcja wymuszona, model matematyczny

### WYKAZ OZNACZEŃ

$\alpha$  – współczynnik wnikania ciepła,  $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{deg}^{-1}$   
 $A$  – powierzchnia suszonego materiału,  $\text{m}^2$   
 $A_0$  – powierzchnia początkowa suszonego materiału,  $\text{m}^2$   
 $b$  – współczynnik skurczu, -  
 $k_0$  – współczynnik szybkości suszenia w I okresie suszenia,  $\text{kg H}_2\text{O}\cdot\text{kg s.m.}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$   
 $M_s$  – masa suchego materiału,  $\text{kg}$   
 $n$  – współczynnik wyznaczany empirycznie, -  
 $r$  – ciepło parowania wody,  $\text{J}\cdot\text{kg H}_2\text{O}^{-1}$   
 $s$  – skurcz suszarniczy, -  
 $\tau$  – czas suszenia,  $\text{s}$   
 $t_p$  – temperatura suszącego powietrza, °C  
 $t_M$  – temperatura mokrego termometru, °C  
 $u$  – zawartość wody w próbce,  $\text{kg H}_2\text{O}\cdot\text{kg s.m.}^{-1}$   
 $u_0$  – początkowa zawartość wody w próbce,  $\text{kg H}_2\text{O}\cdot\text{kg s.m.}^{-1}$   
 $V$  – objętość badanej próbki,  $\text{m}^3$   
 $V_0$  – objętość początkowa badanej próbki,  $\text{m}^3$   
 $V_s$  – objętość suchego materiału,  $\text{m}^3$

## WSTĘP

Pierwszy okres konwekcyjnego suszenia charakteryzuje się stałą szybkością suszenia, a decyduje o tym wymiana ciepła i masy na powierzchni suszonego materiału. Wyniki badań procesu konwekcyjnego suszenia wielu surowców wskazują na to, że szybkość ich suszenia jest stała w krótkim czasie, a następnie zaczyna maleć. Spowodowane jest to występowaniem skurczu suszarniczego podczas suszenia, który powoduje wzrost oporu wymiany masy, a wynika ze zmniejszania się powierzchni suszonego materiału. Kukielko [2002] stwierdziła, że podczas konwekcyjnego suszenia owoców aronii, pierwszy okres suszenia stanowi jedną trzecią całego czasu procesu.

Zmiana powierzchni suszonego surowca jest związana ze zmianą jego objętości [Pabis 1994, Sokhansanj i in. 1999]. Liczne badania prowadzone nad zmianą objętości wskazują również na istnienie empirycznej zależności pomiędzy zmianą objętości i zawartości wody suszonego materiału. Zależność ta jest ściśle związana z określonym surowcem. W literaturze opisywana jest najczęściej przez dwie funkcje: liniową [Suzuki i in. 1976, Mazza i LeMaguer 1980, Kukielko i Jaros 1997, Roselló i in. 1997, Nowak i in. 1998] oraz potęgową [Murakowski 1994, Górnicki 2000]. Na uwagę zasługuje również nieliniowe ujęcie zależności zmiany objętości od objętościowego udziału wody przedstawione przez M. Lis i H. Lis [2001].

Pabis [1994] przedstawił ogólny model matematyczny, pierwszego okresu konwekcyjnego suszenia, uwzględniający zjawisko skurczu suszarniczego. Opisując zmiany powierzchni suszonego materiału równaniem:

$$A(u) = A_0 \left[ (1-b) \frac{u}{u_0} + b \right]^{\frac{2}{3n}} \quad (1)$$

oraz przyjmując współczynnik szybkości suszenia w pierwszym okresie  $k_0$  jako:

$$k_0 = \alpha \frac{A_0}{rM_s} (t_p - t_M) \quad (2)$$

sprowadził równanie:

$$\frac{du}{d\tau} = -\alpha \frac{A_0}{rM_s} (t_p - t_M) \frac{A(u)}{A_0} \quad (3)$$

do następującej postaci:

$$\frac{du}{d\tau} = -k_0 \left[ (1-b) \frac{u}{u_0} + b \right]^{\frac{2}{3n}}. \quad (4)$$

Po scałkowaniu równania (4) przy początkowych warunkach  $u(\tau = 0) = u_0$ , otrzymał, podany poniżej, uogólniony model suszenia w pierwszym okresie z uwzględnieniem skurczu suszarniczego, o postaci:

$$u(\tau) = u_0 \left[ \frac{1}{1-b} \left( 1 - \frac{(1-b)(3n-2)}{3nu_0} k_0 \tau \right)^{\frac{3n}{3n-2}} - \frac{b}{1-b} \right]. \quad (5)$$

Podstawiając:

$$N = \frac{3n}{3n-2} \quad (6)$$

uzyskał następującą postać modelu (5)

$$u(\tau) = u_0 \left[ \frac{1}{1-b} \left( 1 - \frac{1-b}{Nu_0} k_0 \tau \right)^N - \frac{b}{1-b} \right]. \quad (7)$$

Zakładając izotropowy skurcz materiału we wszystkich kierunkach ( $n = 1$ ), model (7) przedstawia się następująco

$$u(\tau) = u_0 \left[ \frac{1}{1-b} \left( 1 - \frac{1-b}{3u_0} k_0 \tau \right)^3 - \frac{b}{1-b} \right]. \quad (8)$$

Po przekształceniu modelu (8) do postaci wielomianu trzeciego stopnia otrzymujemy:

$$u(\tau) = u_0 - k_0 \tau + \frac{(1-b)k_0^2}{3u_0} \tau^2 - \frac{(1-b)^2 k_0^3}{27u_0^2} \tau^3 \quad (9)$$

gdzie:

$$b = \frac{V_s}{V_0}. \quad (10)$$

Przyjmując skurcz suszarniczy zaproponowany przez Jaros [1999]:

$$s = 1 - b \quad (11)$$

uzyskujemy następującą postać modelu (9):

$$u(\tau) = u_0 - k_0 \tau + \frac{sk_0^2}{3u_0} \tau^2 - \frac{s^2 k_0^3}{27u_0^2} \tau^3 \quad (12)$$

Celem pracy była weryfikacja uogólnionego, matematycznego modelu, pierwszego okresu konwekcyjnego suszenia, uwzględniającego skurcz suszarniczy badanego materiału (12), dla krążków jabłka. Realizacja postawionego celu wymagała przeprowadzenia pomiarów zmian zawartości wody w czasie procesu suszenia i zmian objętości próbek.

## MATERIAŁ I METODY

Materiał doświadczalny stanowiły jabłka odmiany 'Jonathan Red' pokrojone w krążki o grubości 0,4 cm i średnicy 2 cm. Tak rozdrobniony materiał po dokładnym wymieszaniu stanowił średnią próbę, którą rozdzielono na trzy części. Jedną z nich suszono konwekcyjnie w suszarce 5-sitowej Bio Dörrer w warunkach stałej temperatury suszenia wynoszącej  $55(\pm 2,5)^{\circ}\text{C}$  i prędkości przepływu powietrza suszącego  $0,5\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Druga została wykorzystana do oznaczenia zmian masy i objętości. Trzecia posłużyła do zbadania wilgotności początkowej.

Próbki o masie 200 g, przeznaczone do suszenia, oraz 50 g – do wyznaczenia wilgotności względnej, odważano na wadze laboratoryjnej „Precisia” z dokładnością  $\pm 0,001\text{ g}$ , a następnie umieszczano na poszczególnych sitach suszarki. Po włożeniu próbek do suszarki dokonywany był pomiar zmian zawartości wody suszonego materiału. Błąd względny maksymalny  $\delta_{\text{umax}}$ , określony na podstawie różniczki zupełnej, nie przekroczył 0,037%.

Podczas suszenia wyznaczano zmiany masy i objętości badanego surowca. Pomiaru objętości suszonego materiału dokonywano w następujący sposób. Badany surowiec bardzo wolno zanurzano w oleju roślinnym („Olej Wielkopolski”) tłokiem strzykawki o objętości 60 ml, zwracając uwagę, aby w strzykawce nie pojawiły się pęcherzyki powietrza, a także, żeby nie nastąpił wyciek oleju. Objętość badanej próbki wyznaczono, odejmując od objętości, którą zajmował olej wraz z próbką, objętość, którą zajmował sam olej w strzykawce (dokładność odczytu 0,1 ml).

Do wyznaczenia suchej masy została użyta suszarka próżniowa SPT-200. Temperatura w suszarce wynosiła  $95^{\circ}\text{C}$ . Umieszczone w niej próbki zważono po upływie trzech godzin od chwili ich włożenia, a następnie, czynność tę powtarzano co 30 min, do chwili, gdy materiał wysuszony został do suchej masy (dokładność pomiaru  $\pm 0,001\text{ g}$ ).

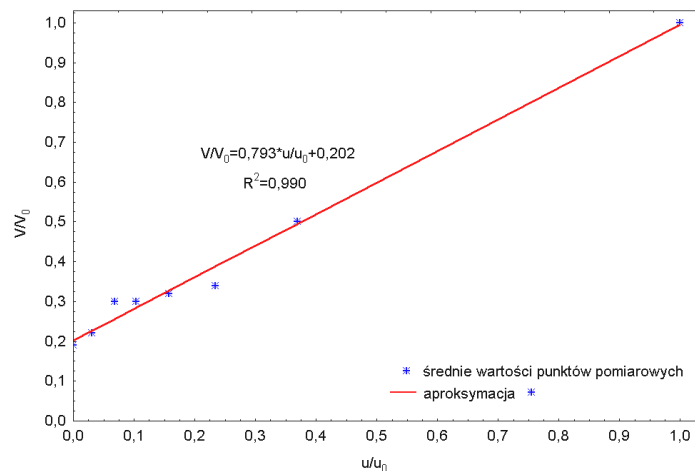
## WYNIKI I DISKUSJA

Średnie wyniki pomiarów skurczu suszarniczego zostały uzyskane na podstawie badań próbek złożonych z dwudziestu krążków jabłka odmiany 'Jonathan Red' przy 8 poziomach wilgotności w dziesięciu powtórzeniach. Zależność stosunku zawartości wody ( $u/u_0$ ) i skurczu objętościowego ( $V/V_0$ ) oraz aproksymację otrzymanych wyników, funkcją liniową z wyrazem wolnym, przedstawiono na rys. 1.

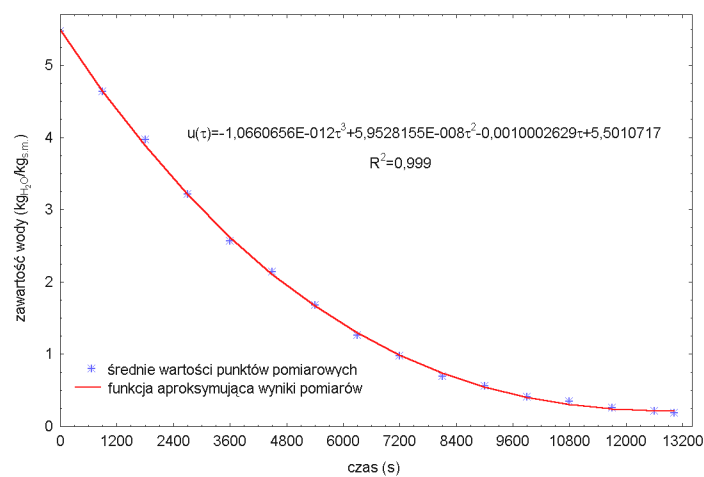
Funkcja liniowa z wyrazem wolnym dobrze opisuje proces skurczu objętościowego krążków jabłka, o czym świadczy wysoka wartość współczynnika determinacji wynosząca  $R^2 = 0,990$ . Dlatego też, do matematycznego ujęcia procesu skurczu wykorzystano właśnie tę funkcję, o postaci

$$\frac{V}{V_0} = 0,793 \frac{u}{u_0} + 0,202 \quad (13)$$

Na podstawie równania (13) wyznaczono współczynnik skurczu  $b$  występujący w równaniu (11);  $b = 0,202$ . Dla wartości pomiarowych  $b = 0,188$ .



Rys. 1. Przebieg skurczu próbek jabłka odmiany 'Jonathan Red'  
Fig. 1. The course of contraction in samples of 'Jonathan Red' apple variety



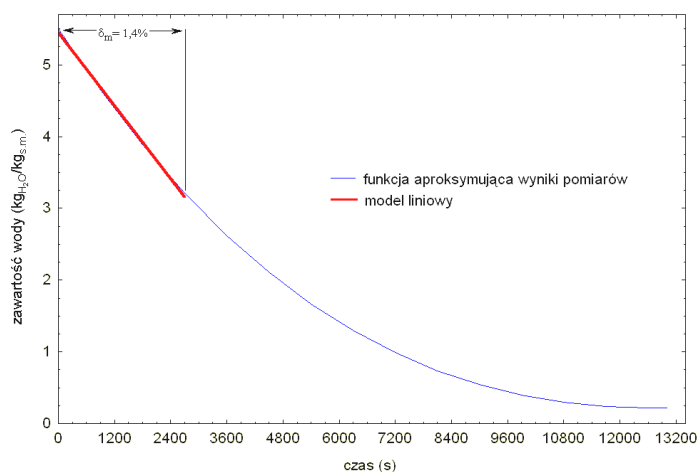
Rys. 2. Zmiany zawartości wody suszonych próbek  
Fig. 2. Changes of moisture (water) content in dried samples

Na rysunku 2 przedstawiono przebieg procesu konwekcyjnego suszenia jabłka 'Jonathan Red' w postaci punktów, będących średnią z trzech serii pomiarowych, oraz krzywą aproksymującą punkty pomiarowe.

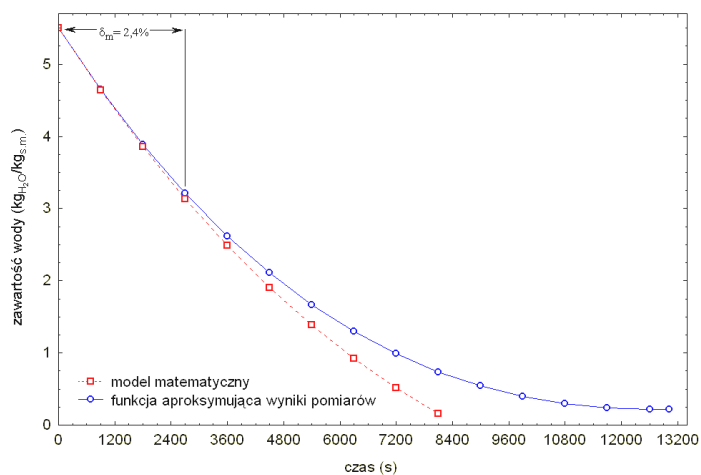
Otrzymany z aproksymacji wielomian trzeciego stopnia dobrze opisuje zmiany zawartości wody suszonych próbek, gdyż wartość współczynnika determinacji jest bardzo wysoka ( $R^2 = 0,999$ ). Opierając się na równaniu regresji postaci:

$$u(\tau) = -1,066E-012\tau^3 + 5,953E-008\tau^2 - 0,001\tau + 5,501 \quad (14)$$

wyznaczono wartość współczynnika szybkości suszenia w pierwszym okresie procesu wynoszącą,  $k_0 = -0,001$ .



Rys. 3. Zestawienie funkcji aproksymującej wyniki pomiarów i modelu liniowego  
Fig. 3. Record sheet (juxtaposition) of the function approximating measurement results and the linear model



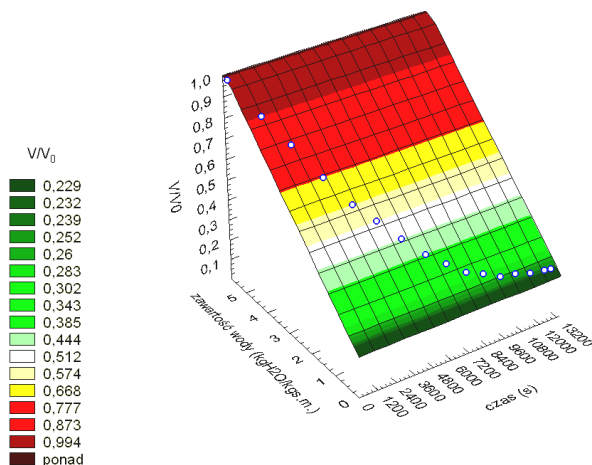
Rys. 4. Weryfikacja modelu pierwszego okresu suszenia próbek jabłka odmiany 'Jonathan Red' z uwzględnieniem skurczu objętościowego, dla  $b = 0,202$ ;  $k = -0,001$   
Fig. 4. Verification of the first period model of drying 'Jonathan Red' variety apple samples with regard to contraction in volume, for  $b = 0,202$ ;  $k = -0,001$

Analizując otrzymany wielomian trzeciego stopnia stwierdzono, że w początkowym okresie suszenia ( $\tau = 2700$  s, czyli 21% całego czasu procesu) można go aproksymować funkcją liniową ze współczynnikiem determinacji  $R^2 = 0,997$  i niewielkim błędem względnym maksymalnym, nieprzekraczającym 1,4%. Potwierdza to istnienie pierwszego okresu suszenia, w którym szybkość suszenia zależy od temperatury i prędkości przepływu powietrza. Rysunek 3 przedstawia zestawienie funkcji aproksymującej wyniki pomiarów oraz funkcji liniowej aproksymującej wielomian w początkowym okresie suszenia.

Ze względu na to, że wyniki badań procesu suszenia dobrze opisuje funkcja aproksymująca o postaci wielomianu trzeciego stopnia (14) oraz że, model matematyczny pierwszego okresu suszenia, uwzględniający skurcz objętościowy (12) jest również zależnością wielomianu trzeciego stopnia, współczynnik szybkości suszenia w pierwszym okresie suszenia ( $k_0$ ) wyznaczono na podstawie funkcji aproksymującej wyniki pomiarów (14). Podstawiając wartość współczynnika skurczu  $b$  z zależności (13), do równania (11), obliczono skurcz suszarniczy  $s$ . Po wstawieniu skurczu suszarniczego  $s$  i współczynnika  $k_0$  szybkości suszenia do modelu (12) uzyskano następującą funkcję zmian zawartości wody od czasu suszenia

$$u(\tau) = 5,501 - 0,001\tau + \frac{0,798(0,001)^2}{3 \cdot 5,501} \tau^2 - \frac{0,798^2(0,001)^3}{27 \cdot 5,501^2} \tau^3 \quad (15)$$

Na rysunku 4 przedstawiono wykres modelu (15), porównując go z funkcją aproksymującą wyniki pomiarowe (14).



Rys. 5. Zmiany objętości i zawartości wody z aproksymacji wyników pomiarów (równanie 14) w czasie suszenia próbek jabłka odmiany ‘Jonathan Red’

Fig. 5. Changes of volume and moisture (water) content from the approximation of measurement results (equation 14) during the drying process of ‘Jonathan Red’ variety apple samples

Model matematyczny pierwszego okresu konwekcyjnego suszenia z uwzględnieniem skurczu objętościowego (15) został zweryfikowany empirycznie w przedziale zawartości wody, od  $u_0 = 5,50 \text{ kg H}_2\text{O}\cdot\text{kg}^{-1} \text{ s.m.}$  do  $u = 3,14 \text{ kg H}_2\text{O}\cdot\text{kg}^{-1} \text{ s.m.}$ , czyli w zakresie wilgotności względnej 85–76%, z błędem nie przekraczającym 2,4%. Ponadto model ten dobrze (z błędem nie większym od 5%) opisuje zmiany zawartości wody, do  $u = 2,49 \text{ kg H}_2\text{O}\cdot\text{kg}^{-1} \text{ s. m.}$ , czyli do wilgotności względnej 71%.

Na rysunku 5 zamieszczono wykres trójwymiarowy, przedstawiający zależność, zmiany objętości i zawartości wody z aproksymacji wyników pomiarów (równanie 14), od czasu suszenia.

## WNIOSKI

1. Model matematyczny pierwszego okresu konwekcyjnego suszenia z uwzględnieniem skurczu suszarniczego został zweryfikowany empirycznie w przedziale zawartości wody, od  $u_0 = 5,50 \text{ kg H}_2\text{O}\cdot\text{kg}^{-1} \text{ s.m.}$  do  $u = 3,14 \text{ kg H}_2\text{O}\cdot\text{kg}^{-1} \text{ s.m.}$ , czyli w zakresie wilgotności względnej 85–76%, z błędem nie przekraczającym 2,4%.

2. Skurcz krążków jabłka odmiany 'Jonathan Red', suszonego w temperaturze  $55^\circ\text{C}$ , przy prędkości przepływu powietrza wynoszącej  $0,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , dobrze opisuje funkcja liniowa z wyrazem wolnym (13); o czym świadczy wysoka wartość współczynnika determinacji,  $R^2 = 0,990$ .

3. Wielomian trzeciego stopnia (14) dobrze opisuje zmiany zawartości wody w całym przedziale czasu procesu konwekcyjnego suszenia jabłka 'Jonathan Red'; gdyż wartość współczynnika determinacji jest bardzo wysoka,  $R^2 = 0,999$ .

## PIŚMIENNICTWO

- Górnicki K., 2000. Modelowanie procesu konwekcyjnego suszenia korzeni pietruszki. Rozprawa doktorska. SGGW Warszawa.
- Jaros M., 1999. Analiza i wyznaczenie wartości współczynnika szybkości suszenia w procesie konwekcyjnego suszenia warzyw. [w:] S. Pabis (red.). Konwekcyjne suszenie warzyw. Teoria i praktyka Kraków, s. 41–50.
- Kukielko E., 2002. Modelowanie procesu konwekcyjnego suszenia owoców aronii w cienkiej warstwie. Rozprawa doktorska. SGGW Warszawa, s. 39.
- Kukielko E., Jaros M., 1997. Modelowanie pierwszego okresu suszenia aronii z uwzględnieniem skurczu materiałowego w warunkach konwekcji naturalnej. Probl. Tech. Rol. Leś. SGGW Warszawa, 135–141.
- Lis M., Lis H., 2001. Wpływ procesu suszenia na gęstość wybranych odmian jabłek. Acta Agrophys. 45, 131–142.
- Mazza G., LeMaguer M., 1980. Dehydration of onions: some theoretical and practical considerations. J. Food Technol. 15, 181–194.
- Murakowski J., 1994. Suszenie pieczarek w warunkach konwekcji naturalnej – modelowanie pierwszego okresu suszenia. Zesz. Probl. Post. Nauk Rol. 417, 35–50.
- Nowak D., Witrowa-Rajchert D., Lewicki P. P., 1998. Skurcz objętościowy i zmiana gęstości marchwi i ziemniaka podczas suszenia konwekcyjnego. Zesz. Probl. Post. Nauk Rol. 454, 461–468.



- Pabis S., 1994. Uogólniony model kinetyki suszenia warzyw i owoców w pierwszym okresie. Zesz. Probl. Post. Nauk Rol. 417, 15–34.
- Rosselló C., Simal S., SanJuan N., Mulet A., 1997. Nonisotropic mass transfer model for green bean drying. J. Agric. Food Chem. 45(2), 337–342.
- Sokhansanj S., Bailey W. G., van Dalfsen K. B., 1999. Drying of north american ginseng roots. Drying Technol. 17(10), 2293–2308.
- Suzuki K., Kubota K., Hasegawa T., Hosaka H., 1976. Shrinkage in dehydration of root vegetables. J. Food Sci. 41, 1189–1193.

#### VERIFICATION OF MATHEMATICAL MODEL OF THE FIRST CONVECTION PERIOD IN APPLE DRYING WITH REGARD TO DEHYDRATION SHRINKAGE

**Abstract.** The mathematical model of the first drying period with regard to dehydration shrinkage was verified in the water (moisture) content interval from  $u_0 = 5,50 \text{ kg H}_2\text{O}\cdot\text{kg}^{-1}$  of dry matter to  $u = 3,14 \text{ kg H}_2\text{O}\cdot\text{kg}^{-1}$  of dry matter, that is, in the range of relative humidity of 85–76%, with the error not exceeding 2,4%. Moisture (water) content measurements were carried out during the drying process, as well as of the changes in apple ring (slice) volume. The apple rings were dried at the temperature of 55°C, at the air flow velocity of 0,5 m·s<sup>-1</sup>.

**Key words:** apples, drying, forced convection, mathematical model

*Roland Zawiślak, Helena Lisowa, Renata Bochyńska, Katedra Techniki Ciepłej, Akademia Rolnicza w Lublinie, ul. Doświadczalna 44, 20-238 Lublin*